



CADERNO DE QUESTÕES

Prova da Segunda Fase

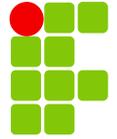
20 de setembro de 2019

Duração: 2h 30min



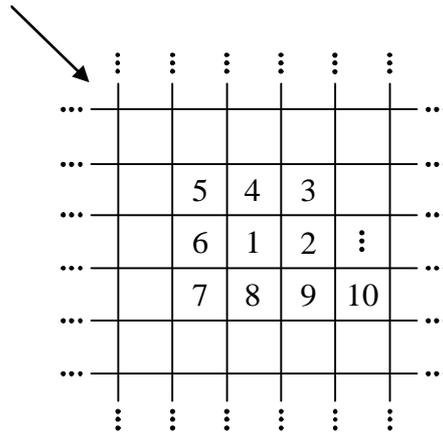
INSTRUÇÕES

1. Você recebeu este Caderno de Questões e o Caderno de Respostas. Confira se o seu número de identificação desta fase da OMIF é igual ao que consta no seu Caderno de Respostas.
2. O Caderno de Respostas possui 5 folhas, uma para cada questão da prova. Você pode utilizar a frente e o verso de cada folha para responder a cada questão, mas não pode destacar uma folha das outras.
3. É necessário justificar todas as suas respostas, apresentando a resolução e os raciocínios utilizados de maneira organizada.
4. A prova tem duração de 2 horas e 30 minutos e pode ser resolvida a lápis ou a caneta.
5. Sobre a sua carteira, você pode deixar apenas lápis, borracha, caneta azul ou preta e régua, além de seu documento pessoal.
6. Durante a prova, é proibida a comunicação entre os candidatos e a utilização de qualquer material de consulta ou aparelhos eletrônicos. **Desligue o celular.**
7. Quando terminar a prova, devolva o seu Caderno de Respostas para o aplicador. Você pode ficar com este Caderno de Questões.

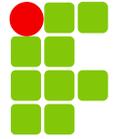


QUESTÃO 1

Em um tabuleiro 11×11 , escrevemos o número 1 na casa central (localizada na sexta linha e sexta coluna) e, em seguida, escrevemos os números naturais seguintes em forma de espiral, da maneira ilustrada na figura a seguir:



- a) (10 pontos) Após o preenchimento completo do tabuleiro seguindo essa regra, qual é a soma de todos os números presentes na diagonal assinalada pela seta na figura?
- b) (10 pontos) Em um tabuleiro $n \times n$, com n ímpar, seguindo a mesma regra de construção dos números a partir da casa central, qual é, em função de n , a soma dos números localizados na casa do canto inferior esquerdo e na casa do canto superior direito?

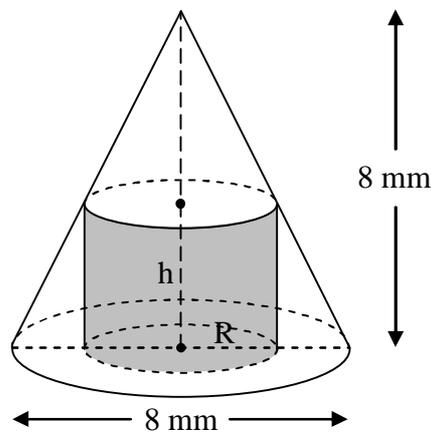


QUESTÃO 2

Na antiguidade, o piercing simbolizava um status de fortuna a quem o usava e, hoje em dia, é usado como objeto de adorno, geralmente nas orelhas.



Considere que um piercing será confeccionado com a forma, na extremidade, de um cone com 8 mm de altura e 8 mm de diâmetro da base. Para que seja possível fixar este cone a uma haste, formando assim o piercing, é necessário fazer um furo cilíndrico na base do cone em direção ao vértice, sendo concêntricas a base do cone e base do furo cilíndrico, conforme a ilustração a seguir.



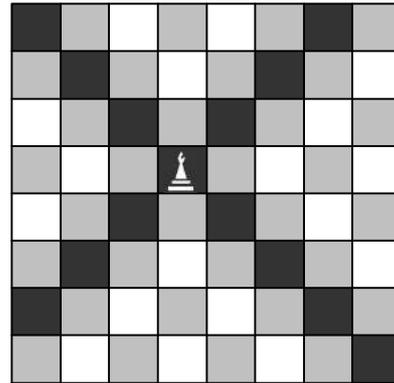
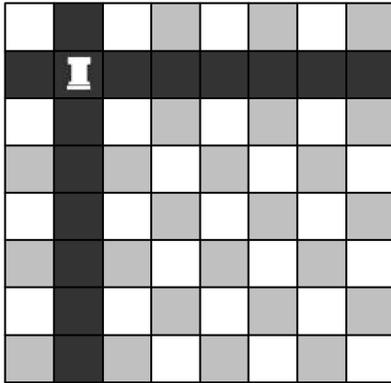
Para garantir a fixação entre as duas partes do piercing, este furo cilíndrico será feito de modo que a sua área lateral seja máxima. Suponha que o furo tangencia a superfície lateral do cone, como ilustrado acima, sem prejudicar a forma externa do piercing.

- (5 pontos)** Sendo h a altura e R o raio da base do furo cilíndrico, exprima h em função de R .
- (5 pontos)** Encontre uma expressão para a área lateral do furo cilíndrico apenas em função de R .
- (5 pontos)** Qual é a área lateral máxima do furo cilíndrico e para que valores de R e h isso acontece?
- (5 pontos)** Que percentual do volume total do cone representa o volume do furo cilíndrico de área lateral máxima?

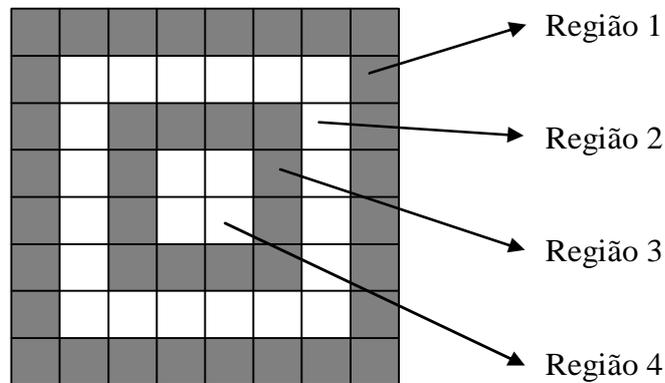


QUESTÃO 3

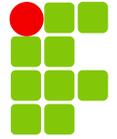
No xadrez, que é jogado em um tabuleiro 8x8, a **torre** se movimenta apenas através das linhas ou colunas e o **bispo** se movimenta apenas através das diagonais. As figuras abaixo exemplificam os movimentos permitidos da torre e do bispo no tabuleiro, respectivamente.



Para responder às perguntas seguintes, considere o tabuleiro dividido em exatamente 4 regiões, destacadas na figura abaixo:

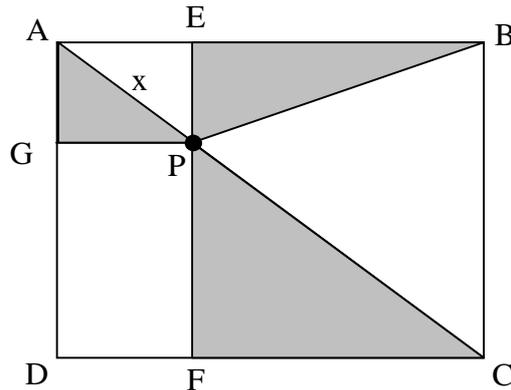


- (5 pontos)** De quantos modos podemos posicionar uma torre e um bispo neste tabuleiro, de modo que a Torre fique na Região 1 e o Bispo não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre?
- (5 pontos)** De quantos modos podemos posicionar uma torre e um bispo neste tabuleiro, de modo que a Torre fique na Região 2 e o Bispo não fique na mesma linha, coluna ou diagonal da Torre?
- (10 pontos)** No total, de quantos modos podemos posicionar uma Torre e um Bispo neste tabuleiro, de modo que eles não fiquem na mesma linha, coluna ou diagonal?



QUESTÃO 4

O retângulo $ABCD$, representado na figura, tem lados de comprimento $AB=8$ e $AD=6$. O ponto P pertence à diagonal \overline{AC} e está a uma distância x de A . O segmento \overline{PG} é paralelo ao lado \overline{AB} e o segmento \overline{EF} contém o ponto P e é paralelo ao lado \overline{AD} .



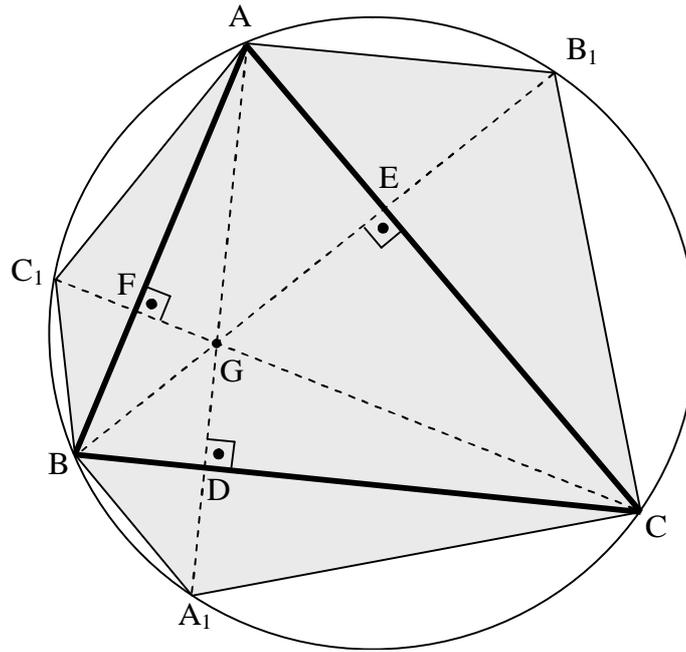
A região cinza da figura, formada pela união dos triângulos APG , BPE e CPF , possui área $A(x)$.

- (4 pontos)** Determine o comprimento do segmento \overline{PG} em função de x .
- (4 pontos)** Determine o comprimento do segmento \overline{AG} em função de x .
- (8 pontos)** Encontre a expressão de $A(x)$ para $0 \leq x \leq 10$.
- (4 pontos)** Qual é a menor área que a região cinza pode ter e para que valor de x isso acontece?



QUESTÃO 5

Considere um triângulo ABC inscrito em uma circunferência. As alturas que partem dos vértices A , B e C encontram o triângulo nos pontos D , E e F , respectivamente, e os prolongamentos destas alturas encontram a circunferência nos pontos A_1 , B_1 e C_1 , respectivamente.



- a) (2 pontos) Mostre que os ângulos $\widehat{B_1AC}$ e \widehat{EBC} tem a mesma medida.
- b) (3 pontos) Mostre que os ângulos \widehat{DAC} e \widehat{EBC} tem a mesma medida.
- c) (5 pontos) Prove que a área do polígono $BC_1AB_1CA_1$ é o dobro da área do triângulo ABC .
- d) (10 pontos) O ponto onde uma altura do triângulo encontra um lado é chamado de pé da altura. No triângulo ABC considerado acima, por exemplo, D , E e F são os pés das alturas. Quando ligamos os três pés das alturas, obtemos o que chamamos de triângulo órtico. Se as coordenadas dos vértices de um triângulo ABC são $A = (2, 0)$, $B = (-2, 0)$ e $C = (-1, 3)$, determine a área do seu triângulo órtico.